

УДК 629.735.33.015.3.024

В.Д. Доник, канд. техн. наук

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НЕСТАЦІОНАРНОГО ПРОЦЕСУ ВИТІКАННЯ ПОВІТРЯ З ВІДСІКУ

Інститут екології та дизайну НАУ, e-mail: nr@rkelsoll.kiev.ua

Розроблено математичну модель визначення тиску і температури повітря в загальмованому потоці в середині відсіку при підведенні і відведенні повітря. Проведено дослідження впливу параметрів підвідного і відвідного повітря на параметри повітря в середині відсіку.

Вступ

Витікання повітря з відсіку (об'єму) відноситься до процесів стискання і розширення потоку і є однією з основних задач у газодинаміці. Дослідження цих процесів розглянуто в працях [1–6].

При описуванні процесів витікання повітря з відсіку широко використовують рівняння стану [4; 5].

Дослідження процесів витікання повітря з відсіку при ізотермічній, адіабатній і політропній зміні параметрів повітря дозволили розширити область розв'язуваних задач [6; 7].

Автором праці [8] розглянуті задача витікання повітря з відсіку на основі термодинаміки тіла змінної маси і різні випадки масообмінних процесів.

Особливості витікання газу з резервуара через звужуюче сопло наведено в працях [6; 9].

При вирішенні багатьох практичних задач параметри потоку змінюються за політропним законом. Дослідження такого класу задач проведено в працях [7; 10]. У праці [7] отримані основні математичні моделі на підставі рівнянь нерозривності і стану. У праці [10] витікання повітря з відсіку описано на підставі рівнянь нерозривності, стану й енергії. Одержана таким способом математична модель є узагальненою.

Окремими випадками узагальненої моделі є математичні моделі, отримані в працях [7; 8].

Дослідження математичної моделі для визначення витрати повітря при політропній зміні параметрів середовища в процесі витікання повітря з відсіку подано в праці [11].

Аналіз опублікованих робіт показує, що істотно впливають на область застосування розроблених математичних моделей припущення, прийняті при виведенні основних рівнянь досліджуваного процесу.

У розроблених моделях не розкриті і недостатньо досліджені у взаємозв'язку статичні і динамічні параметри потоку для процесів витікання повітря з відсіку.

Для деяких розрахункових випадків витікання повітря автори припускають, наприклад, рівність параметрів статичного і загальмованого потоків.

Нестаціонарні процеси в середині відсіку при підведенні і відведенні повітря з урахуванням їхнього взаємного впливу недостатньо досліджені. Практично відсутні математичні моделі з оцінювання впливу нестаціонарності параметрів газу у середині відсіку на процес підведення і відведення повітря з відсіку.

Постановка задачі

Робота присвячена подальшому поглибленню досліджень впливу процесів підведення і відведення повітря на зміну параметрів повітря в середині відсіку. У роботі необхідно вирішити такі задачі:

- розробити математичну модель зміни параметрів газу в середині відсіку при підведенні і відведенні газу з урахуванням параметрів загальмованого потоку;
- провести дослідження розробленої математичної моделі і зіставити результати розрахунку й експерименту.

Математична модель

Розглянемо відсік об'ємом V , в якому знаходиться повітря масою m з ентальпією загальмованого потоку:

$$i_0 = i + \frac{w^2}{2},$$

де i – ентальпія, Дж/кг:

$$i = u + \frac{p}{\rho},$$

u – питома внутрішня енергія, Дж/кг; p – статичний тиск, Па; ρ – густина, кг/м³; $\frac{w^2}{2}$ – питома кінетична енергія, Дж/кг.

У досліджуваній об'єм V підводиться повітря масою $m^{(1)}$ з ентальпією гальмування

$$i_0^{(1)} = i^{(1)} + \frac{w^{2(1)}}{2}$$

і відводиться повітря:

$$i_0^{(2)} = i^{(2)} + \frac{w^{2(2)}}{2}.$$

За малий проміжок часу $d\tau$ в об'єм підводиться dq і відводиться dl питома енергія.

На підставі закону збереження енергії запишемо в диференціальному вигляді зміну параметрів повітря в середині об'єму

$$dq - dl = d(i_0) - d(i_0^{(1)}) + d(i_0^{(2)}). \quad (1)$$

Відповідно до закону нерозривності запишемо зміну маси газу у виділеному об'ємі:

$$dm = dm^{(1)} - dm^{(2)}. \quad (2)$$

Ентальпію гальмування виразимо через температуру гальмування:

$$i_0 = C_p T_0, \quad i_0^{(1)} = C_p T_0^{(1)}, \quad i_0^{(2)} = C_p T_0^{(2)},$$

де C_p – питома теплоємність повітря при постійному тиску, Дж/(кг × град).

Рівняння (1) запишемо так:

$$dq - dl = d(C_p T_0) - d(C_p T_0^{(1)}) + d(C_p T_0^{(2)}). \quad (3)$$

З рівняння (3) визначаємо зміну температури загальмованого повітря у відсіку:

$$d(T_0) = \frac{1}{C_p} (dq - dl) + d(T_0^{(1)}) - d(T_0^{(2)});$$

$$\frac{d(T_0)}{d\tau} = \frac{1}{C_p} \left(\frac{dq}{d\tau} - \frac{dl}{d\tau} \right) + \frac{d(T_0^{(1)})}{d\tau} - \frac{d(T_0^{(2)})}{d\tau}. \quad (4)$$

Рівняння (4) встановлює залежність між температурою гальмування повітря у відсіку, підвідною dq і відвідною dl питомою енергією, підвідною $T_0^{(1)}$ і відвідною $T_0^{(2)}$ температурою загальмованого потоку.

Припустимо, що параметри гальмування повітря в об'ємі описуються рівнянням стану:

$$P_0 = \frac{m}{V} RT_0,$$

де P_0 – повний тиск, Па; R – універсальна газова стала, Дж/(кг × град).

Диференціюємо рівняння стану за часом і після перетворень одержуємо:

$$\frac{dP_0}{d\tau} = \frac{R}{V} \left(m \frac{dT_0}{d\tau} + T_0 \frac{dm}{d\tau} \right) - \frac{P_0}{V} \frac{dV}{d\tau}. \quad (5)$$

Використовуємо рівняння (2) і після перетворень рівняння (5) будемо мати:

$$\frac{dP_0}{d\tau} = \frac{P_0}{T_0} \frac{dT_0}{d\tau} + \frac{RT_0}{V} (G_1 - G_2) - \frac{P_0}{V} \frac{dV}{d\tau}, \quad (6)$$

де $G^{(1)}$ – витрата підвідного повітря, кг/с:

$$G^{(1)} = \frac{dm^{(1)}}{d\tau};$$

$G^{(2)}$ – витрата відвідного повітря, кг/с:

$$G^{(2)} = \frac{dm^{(2)}}{d\tau}.$$

Розроблена система диференціальних рівнянь (4), (6) описує процес зміни в часі тиску і температури повітря в загальмованому потоці усередині відсіку при підведенні dq і відведенні dl питомої енергії, що входить $G^{(1)}$ і виходить $G^{(2)}$ повітря, підвідної $T_0^{(1)}$ і відвідної $T_0^{(2)}$ температури загальмованого потоку, зміні обсягу dV відсіку.

Дослідження математичної моделі

Проведемо дослідження системи диференціальних рівнянь (4), (6) для різних випадків підведення і відведення повітря з відсіку.

Порівняно з працями [6–9] розроблена математична модель описує процес підведення і відведення повітря з відсіку за параметрами загальмованого потоку. Обмежень щодо зміни статичних і динамічних параметрів потоку не зроблено.

Проведемо аналіз впливу параметрів потоку, що раніше не досліджувались. Якщо процес витікання повітря з об'єму супроводжується змінною об'ємом, то з рівняння (6) випливає, що при $\frac{dV}{d\tau} > 0$ й інших рівних умовах відбувається

зменшення тиску повітря або при $\frac{dV}{d\tau} < 0$ відбувається збільшення тиску повітря в об'ємі пропорційно $\frac{P_0}{V} \frac{dV}{d\tau}$.

При витіканні повітря з великого об'єму

$$T_0 = T, \quad P_0 = P,$$

постійній температурі повітря

$$\frac{dT_0}{d\tau} = 0, \quad T_0 = \text{const}$$

і постійному об'ємі

$$\frac{dV}{d\tau} = 0, \quad V = \text{const}$$

рівняння (6) відповідно до праці [4] перетвориться до рівняння:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{RT}{V} (G^{(1)} - G^{(2)}).$$

За наявності додаткових допущень

$$\frac{dT_0^{(1)}}{d\tau} = 0, \quad T_0^{(1)} = \text{const},$$

$$\frac{dT_0^{(2)}}{d\tau} = 0, \quad T_0^{(2)} = \text{const}$$

рівняння (6) перетвориться до рівняння для адіабатного процесу відповідно до праці [8]. Дослідження цієї моделі подано в праці [10].

Аналогічно рівнянню (5) запишемо рівняння для підведення повітря у відсік:

$$\frac{dP_0^{(1)}}{d\tau} = \frac{R^{(1)}}{V^{(1)}} \left(m^{(1)} \frac{dT_0^{(1)}}{d\tau} + T_0^{(1)} \frac{dm^{(1)}}{d\tau} \right) - \frac{P_0^{(1)}}{V^{(1)}} \frac{dV^{(1)}}{d\tau}. \quad (7)$$

З рівняння (7) визначаємо:

$$\frac{dT_0^{(1)}}{d\tau} = \frac{T_0^{(1)}}{P_0^{(1)}} \frac{dP_0^{(1)}}{d\tau} + \frac{T_0^{(1)}}{V^{(1)}} \frac{dV^{(1)}}{d\tau} - \frac{T_0^{(1)}}{m^{(1)}} \frac{dm^{(1)}}{d\tau}. \quad (8)$$

При відведенні повітря з відсіку зміна температури гальмування буде дорівнювати:

$$\frac{dT_0^{(2)}}{d\tau} = \frac{T_0^{(2)}}{P_0^{(2)}} \frac{dP_0^{(2)}}{d\tau} + \frac{T_0^{(2)}}{V^{(2)}} \frac{dV^{(2)}}{d\tau} - \frac{T_0^{(2)}}{m^{(2)}} \frac{dm^{(2)}}{d\tau}. \quad (9)$$

Система диференціальних рівнянь (4), (6), (8), (9) описує зміну тиску і температури повітря у відсіку в загальмованому потоці при підведенні і відведенні повітря з відсіку. Порівняно з працями [6–9] розроблена математична модель додатково описує параметри гальмування в середині відсіку (P_0, T_0) і враховує складові підвідного повітря у відсік при зміні повного тиску повітря

$$\frac{T_0^{(1)}}{P_0^{(1)}} \frac{dP_0^{(1)}}{d\tau},$$

зміні об'єму

$$\frac{T_0^{(1)}}{V^{(1)}} \frac{dV^{(1)}}{d\tau}$$

і повітря, що відводиться

$$\frac{T_0^{(1)}}{P_0^{(1)}} \frac{dP_0^{(1)}}{d\tau}; \quad \frac{T_0^{(2)}}{V^{(2)}} \frac{dV^{(2)}}{d\tau}.$$

Вплив зміни маси підвідного і відвідного газу на параметри газу в середині відсіку визначається складовими:

$$\frac{T_0^{(1)}}{m^{(1)}} \frac{dm^{(1)}}{d\tau}; \quad \frac{T_0^{(2)}}{m^{(2)}} \frac{dm^{(2)}}{d\tau}.$$

Ступінь впливу цих параметрів на параметри в середині відсіку визначається відповідно до рівнянь (4), (6), (8), (9).

Рівняння (8), (9) визначають зв'язок між параметрами підвідного ($P_0^{(1)}, T_0^{(1)}, m^{(1)}, V^{(1)}$) і відвідного ($P_0^{(2)}, T_0^{(2)}, m^{(2)}, V^{(2)}$) повітря з відсіку.

На підставі рівнянь (4), (6), (8), (9) можливо описати процес підведення газу у відсік при нестационарних процесах недорозширеного і розширеного струменів. Ці режими витікання газу в працях [12–14] недостатньо повно досліджені і не містять математичних моделей таких режимів витікання газу.

Розглянемо деякі окремі випадки витікання повітря з відсіку, що впливають із системи диференціальних рівнянь (4), (6), (8), (9).

При підведенні повітря виникає необхідність визначити умову, при якій підтримується постійна температура підвідного повітря ($T_0^{(1)} = \text{const}$).

З рівняння (8) визначаємо умову підтримки ($T_0^{(1)} = \text{const}$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_0^{(1)}} \frac{dP_0^{(1)}}{d\tau} + \frac{1}{V^{(1)}} \frac{dV^{(1)}}{d\tau} &= \frac{1}{m^{(1)}} \frac{dm^{(1)}}{d\tau}; \\ \frac{d[\ln(P_0^{(1)})]}{d\tau} + \frac{d[\ln(V^{(1)})]}{d\tau} &= \frac{d[\ln(m^{(1)})]}{d\tau}. \end{aligned} \quad (10)$$

Якщо підведення повітря проходить при постійному тиску ($P_0^{(1)}$), то рівняння (10) буде мати вигляд

$$\frac{d[\ln(m^{(1)})]}{d\tau} = \frac{d[\ln(V^{(1)})]}{d\tau}. \quad (11)$$

При невиконанні умов (10) чи (11) підведення повітря у відсік проходить при $T_0^{(1)} = \text{var}$.

Умови (11) виконуються і при відведенні повітря з відсіку.

При вирішенні деяких практичних задач виконуються умови:

$$\begin{aligned} dq=0; \quad dl=0; \quad \frac{dP_0^{(1)}}{d\tau}=0; \quad \frac{dV^{(1)}}{d\tau}=0; \\ \frac{dP_0^{(2)}}{d\tau}=0; \quad \frac{dV^{(2)}}{d\tau}=0; \quad \frac{dV}{d\tau}=0. \end{aligned}$$

Підведення повітря у відсік проводиться до повного його гальмування. Рівняння (4), (6), (8), (9) перетворюються до рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{d\tau} &= \frac{R}{V} \left(\frac{m}{m^{(1)}} T_0^{(1)} G_1 - \frac{m}{m^{(2)}} T_0^{(2)} G_2 \right) + \\ &+ \frac{RT_0}{V} (G_1 - G_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Параметри $\frac{m}{m^{(1)}}$ і $\frac{m}{m^{(2)}}$ відбивають ступінь розходження між густиною підвідного і відвідного до відсіку повітря.

При $\frac{m}{m^{(1)}} = 1$ і $\frac{m}{m^{(2)}} = 1$ рівняння (12) запишеться у вигляді

$$\frac{dP_0}{d\tau} = \frac{R}{V} (T_0^{(1)} G_1 - T_0^{(2)} G_2) + \frac{RT_0}{V} (G_1 - G_2). \quad (13)$$

Рівняння (13) описує зміну повного тиску повітря у відсіку залежно від температури і витрати підвідного і відвідного повітря. Порівняно з працями [4–9] рівняння (13) враховує тиск повітря у відсіку, температуру підвідного і відвідного повітря у загальмованому потоці.

При постійній температурі підвідного і відвідного повітря

$$T_0^{(1)} = T_0^{(2)} = T^{(1)} = T = \text{const}, P_0 = P$$

рівняння (12) і (13) перетворюються до рівняння, наведеного в праці [10].

Розглянемо процеси, що протікають у відсіку при рівності підвідного і відвідного повітря ($G^{(1)} = G^{(2)}$). Відповідно до праці [4] тиск повітря у відсіку буде дорівнювати

$$\frac{dP}{d\tau} = 0, P = \text{const}.$$

Аналіз рівняння (12) показує, що зміна тиску повітря в цьому випадку описується рівнянням

$$\frac{dP_0}{d\tau} = \frac{R}{V} G^{(1)} \left(\frac{m}{m^{(1)}} T_0^{(1)} - \frac{m}{m^{(2)}} T_0^{(2)} \right). \quad (14)$$

Порівняно з працями [5–12] рівняння (14) додатково враховує вплив параметрів підвідного і відвідного повітря на тиск повітря в середині відсіку. Нестационарні процеси в середині відсіку визначаються параметрами $\frac{m}{m^{(1)}}, \frac{m}{m^{(2)}}, T_0^{(1)}, T_0^{(2)}$.

Ступінь впливу цих параметрів на тиск газу в середині відсіку визначається відповідно до рівняння (14). При рівності $\frac{m}{m^{(1)}} = \frac{m}{m^{(2)}}$ зміну тиску газу у відсіку визначають за рівнянням

$$\frac{dP_0}{d\tau} = \frac{R}{V} G^{(1)} \frac{m}{m^{(1)}} (T_0^{(1)} - T_0^{(2)}).$$

Тиск газу у відсіку залежить від різниці температур підвідного і відвідного повітря.

При виконанні умов

$$\frac{m}{m^{(1)}} = 1; \quad \frac{m}{m^{(2)}} = 1; \quad T_0^{(1)} = T_0^{(2)}$$

рівняння (12) і (14) перетворюються до рівняння відповідно до праці [4].

Залежність зміни тиску повітря у відсіку в часі при відведенні повітря зображена на рис. 1.

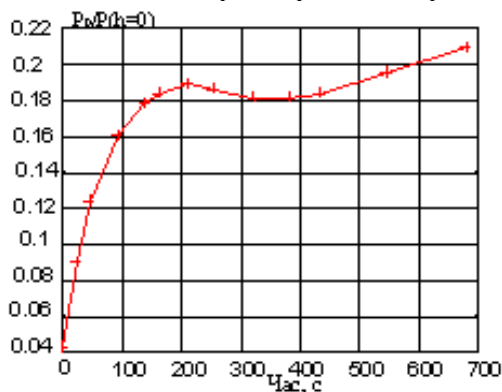


Рис. 1. Зміна тиску повітря у відсіку $P_0/P(h=0)$ у часі відносно стандартної атмосфери

Значну похибку на результати моделювання розроблених моделей дає коефіцієнт витрати повітря. Проведені чисельні дослідження моделі з коефіцієнтом витрати відповідно до праці [10] не завжди дають задовільні оцінки тиску повітря у відсіку. Коефіцієнт витрати залежить від тисків повітря у відсіку і середовищі, в яке відбувається витікання. Значні зміни коефіцієнта витрати зазнає в області переходу з докритичної (закритичної) області витікання в закритичну (докритичну) область. У цій області розрахунку не можливо інтегрувати функцію зміни тиску повітря у відсіку, тому що вона зазнає розриву. Усунення цього недоліку можливо тільки після введення додаткової функції переходу від одного режиму до іншого, що дозволяє здійснювати безупинне інтегрування процесу у всій області витікання, чи виключити з рівнянь визначення витрати повітря коефіцієнт витрати повітря.

В області малих швидкостей, докритичних і закритичних витікань на процес зміни тиску повітря у відсіку впливає підведення і відведення енергії. Застосування рівнянь (8), (9) дозволяє усунути цей недолік.

Експеримент

Під час експериментальних досліджень процесів витікання повітря з відсіку вимір тиску повітря у відсіку проводився за методикою, наведеною в працях [10; 11]. Результати таких досліджень зображені на рис. 2.

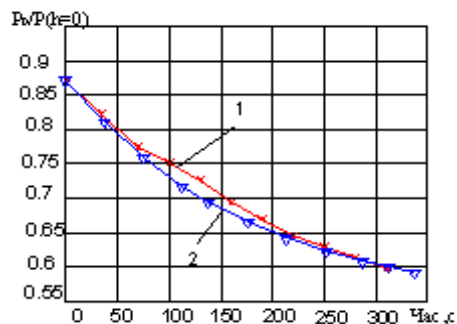


Рис. 2. Порівняльна оцінка результатів розрахунку й експерименту зміни тиску повітря у відсіку $P_0/P(h=0)$ у часі відносно стандартної атмосфери: 1 – експеримент, 2 – розрахунок

Розроблена система диференціальних рівнянь (4), (6), (8), (9) описує процес витікання повітря з відсіку і відбиває характер зміни тиску повітря у відсіку. Похибка результатів розрахунку повного тиску повітря у відсіку не перевищує 7%. Значний вплив на результати розрахунку роблять зміни тиску підвідного і відвідного повітря. Ступінь впливу цих параметрів визначається складовими

вими $\frac{T_0^{(1)}}{P_0^{(1)}} \frac{dP_0^{(1)}}{d\tau}$, $\frac{T_0^{(2)}}{P_0^{(2)}} \frac{dP_0^{(2)}}{d\tau}$ відповідно до рів-

нянь (8), (9). Точність вимірювання тиску повітря істотно залежить від розмірів відсіку. Для великих об'ємів місце розташування датчиків вимірювання тиску повітря не впливало на показання датчиків. Зі зменшенням розмірів відсіку, коли значення повного і статичного тисків не збігаються ($P_0 \neq P$), на показання датчиків впливає динамічна складова потоку ($\rho W^2 / 2$). Тому для оцінки правильності результатів розрахунку для таких відсіків потрібно робити інтегрування системи диференціальних рівнянь за об'ємом чи об'єм розбивати на елементарні об'єми. Для кожного такого об'єму необхідно вирішувати систему диференціальних рівнянь (4), (6), (8), (9). Проведені розрахунки з застосуванням чисельних методів підтвердили вплив динамічної складової потоку у відсіку на результати вимірювання.

Вимірювання тисків повітря у відсіках проводилося і на інших параметрах потоку. Результати розрахунку відповідно до системи диференціальних рівнянь мали стійкі оцінки.

Висновки

Для підвищення рівня вивчення процесу в середині відсіку розроблено математичну модель визначення параметрів повітря в загальмованому потоці в середині відсіку при підведенні і відведенні повітря. Проведено аналіз впливу параметрів підвідного і відвідного повітря на тиск і температуру повітря в середині відсіку. Досліджено окремі випадки витікання повітря з відсіку. Для деяких режимів витікання повітря розроблена математична модель.

Зіставлення результатів розрахунку й експерименту показує, що розроблена математична модель відбиває характер зміни параметрів повітря в середині відсіку й описує процеси в середині відсіку з достатньою для практики точністю. Необхідно продовжити дослідження з вивчення впливу вектора швидкості потоку при підведенні і відведенні повітря на параметри повітря в середині відсіку.

В.Д. Доник

Математическая модель нестационарного процесса истечения воздуха из отсека

Разработана математическая модель определения давления и температуры воздуха в заторможенном потоке внутри отсека при подводе и отводе воздуха. Проведены исследования влияния параметров подводимого и отводимого воздуха на параметры воздуха внутри отсека.

V.D. Donik

Mathematical model of unsteady air outflow from compartment

The mathematical model of gas efflux from large volume bay regarding gas braking parameters has been developed. Influence of parameters of air which inflows and outflows on parameters of air inside a compartment is investigated.

Список літератури

1. Reynolds O. On the flow of gases // Phic. Mag. 5/21. – 1886. – 185 p.
2. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 575 с.
3. Жуковский Н.Е. Видоизменение метода Кирхгоффа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока // Собр. соч. Т.1. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 656 с.
4. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Механика сплошных сред. – М.: Гостехиздат, 1954. – 795 с.
5. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. – 3-е изд. – М.: Наука, 1969. – 824 с.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – 5-е изд. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
7. Быков Л.Т., Ивлентиев В.С., Кузнецов В.И. Высотное оборудование пассажирских самолетов. – М.: Машиностроение, 1972. – 332 с.
8. Мамонтов М.А. Вопросы термодинамики тела переменной массы. – М.: Оборонгиз, 1961. – 56 с.
9. Бендерский Б.Я. Техническая термодинамика и теплопередача. – Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2002. – 264 с.
10. Доник В.Д. Математическая модель истечения воздуха из объема // 36. наук. пр. ПІМЕ НАН України. – К., 2001. – С. 38–49.
11. Доник В.Д. Математична модель визначення витрат повітря для політропного процесу при розгерметизації відсіку літака // Вісн. НАУ. – 2002. – № 3(14). – С. 23–26.
12. Быков Л.Т., Егоров М.С., Тарасов П.В. Высотное оборудование самолетов. – М.: Оборонгиз, 1958. – 392 с.
13. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. – 3-е изд. – М.: Наука, 1969. – 824 с.
14. Гершкович А.М. Метод расчета времени истечения газа из резервуара постоянного объема. – Кислород, 1948. – № 1. – 224 с.

Стаття надійшла до редакції 31.03.05.